Penerapan Integral dalam Kehidupan Masyarakat Sehari-hari

MODUL TEMA 10

MATEMATIKA
PAKET C SETARA SMA/MA
KELAS XI

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan
Tahun 2018

Penerapan Integral dalam Kehidupan Masyarakat Sehari-hari

MODUL TEMA 10

MATEMATIKA
PAKET C SETARA SMA/MA
KELAS XI

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan
Tahun 2018

Matematika Paket C - Setara SMA/MA kelas XI
Modul Tema 10 : Penerapan Integral dalam Kehidupan Masyarakat Sehari-hari

- **Penulis:** Nursanto

- **Diterbitkan oleh**: Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan-Ditjen Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat-Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2018

iv+ 56 hlm + illustrasi + foto; 21 x 28,5 cm

Modul Dinamis: Modul ini merupakan salah satu contoh bahan ajar pendidikan kesetaraan yang berbasis pada kompetensi inti dan kompetensi dasar dan didesain sesuai kurikulum 2013. Sehingga modul ini merupakan dokumen yang bersifat dinamis dan terbuka lebar sesuai dengan kebutuhan dan kondisi daerah masing-masing, namun merujuk pada tercapainya standar kompetensi dasar.

Kata Pengantar

Pendidikan kesetaraan sebagai pendidikan alternatif memberikan layanan kepada mayarakat yang karena kondisi geografis, sosial budaya, ekonomi dan psikologis tidak berkesempatan mengikuti pendidikan dasar dan menengah di jalur pendidikan formal. Kurikulum pendidikan kesetaraan dikembangkan mengacu pada kurikulum 2013 pendidikan dasar dan menengah hasil revisi berdasarkan peraturan Mendikbud No.24 tahun 2016. Proses adaptasi kurikulum 2013 ke dalam kurikulum pendidikan kesetaraan adalah melalui proses kontekstualisasi dan fungsionalisasi dari masing-masing kompetensi dasar, sehingga peserta didik memahami makna dari setiap kompetensi yang dipelajari.

Pembelajaran pendidikan kesetaraan menggunakan prinsip flexible learning sesuai dengan karakteristik peserta didik kesetaraan. Penerapan prinsip pembelajaran tersebut menggunakan sistem pembelajaran modular dimana peserta didik memiliki kebebasan dalam penyelesaian tiap modul yang di sajikan. Konsekuensi dari sistem tersebut adalah perlunya disusun modul pembelajaran pendidikan kesetaraan yang memungkinkan peserta didik untuk belajar dan melakukan evaluasi ketuntasan secara mandiri.

Tahun 2017 Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan, Direktorat Jendral Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat mengembangkan modul pembelajaran pendidikan kesetaraan dengan melibatkan Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru dan tutor pendidikan kesetaraan. Modul pendidikan kesetaraan disediakan mulai paket A tingkat kompetensi 2 (kelas 4 Paket A). Sedangkan untuk peserta didik Paket A usia sekolah, modul tingkat kompetensi 1 (Paket A setara SD kelas 1-3) menggunakan buku pelajaran Sekolah Dasar kelas 1-3, karena mereka masih memerlukan banyak bimbingan guru/tutor dan belum bisa belajar secara mandiri.

Kami mengucapkan terimakasih atas partisipasi dari Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru, tutor pendidikan kesetaraan dan semua pihak yang telah berpartisipasi dalam penyusunan modul ini.

Jakarta, Desember 2018
Direktur Jenderal

Harris Iskandar

Daftar Isi

Kata Pengantar ....
Daftar Isi ....
Petunjuk Penggunaan Modul ....
Tujuan yang diharapkan setelah mempelajari modul
Pengantar Modul ....
MODUL 10

Penerapan Integral Dalam Kehidupan Masyarakat Sehari-hari

Unit 1: Luas Daerah tak Beraturan

1.1 Pengertian Integral

1.2 Integral Tak Tentu

1.2.1 Sifat-sifat Integral Tak Tentu

1.2.2 Integral Tak Tentu fungsi trigonometri

1.3 Integral Tertentu

1.4 Teknik Pengintegralan

1.4.1 Integral Substitusi

1.4.2 Integral Parsial

1.5 Menentukan Luas Daerah

1.5.1 Proses Limit (Integral Riemann)

1.5.2 Menentukan Luas Daerah yang dibatasi Kurva

Unit 2: Volume benda tak Beraturan

2.1 Menentukan Volume dengan Integral

2.2 Metode Kulit Tabung

2.2.1 Volume Benda Putar terhadap Sumbu x yang dibatasi 1 Kurva

2.2.2 Volume Benda Putar terhadap Sumbu y yang dibatasi 1 Kurva

Rangkuman
Kriteria Pindah Modul
Saran Referensi
Penilaian
Kunci Jawaban
Daftar Pustaka
Profil Penulis

MODUL 10

Penerapan Integral dalam Kehidupan Masyarakat Sehari-hari

Petunjuk Penggunaan Modul

Modul ini membahas tentang penerapan integral dalam kehidupan masyarakat sehari-hari, integral merupakan invers dari operasi turunan dan limit, materi yang dibahas dalam modul ini meliputi integral tak tentu beserta sifat-sifatnya, integral tertentu, teknik pengintegralan, integral substitusi dan integral parsial dan juga menentukan luas daerah dan juga menentukan volume benda tak beraturan dengan menggunakan metode kulit tabung. Selain penjelasan mengenai materi yang ditampilkan, modul ini juga dilengkapi dengan latihan untuk menguji pemahaman dan penguasaan dari peserta didik terhadap materi yang telah di pelajarinya. Modul ini disusun dengan bahasa yang sederhana, dan dibuat berurutan sesuai dengan urutan materi yang terlebih dahulu perlu dikuasai. Untuk itu, sebelum mempelajari modul ini sebaiknya.

1. Baca pengantar modul untuk mengetahui arah pengembangan modul
2. Membaca kompetensi dasar dan tujuan yang ingin dicapai melalui modul.
3. Agar memperoleh gambaran yang utuh mengenai modul, maka pengguna perlu membaca dan memahami peta konsep.
4. Mempelajari modul secara berurutan agar memperoleh pemahaman yang utuh.
5. Ikuti semua tahapan dan petunjuk yang ada pada modul ini

Tujuan yang Diharapkan Setelah Mempelajari Modul

Tujuan setelah mempelajari modul ini, diharapkan peserta didik memiliki kemampuan, pengetahuan, dan keterampilan tentang :

1. Menemukan, menggunakan dan mengidentifikasi konsep integral dan sifat-sifatnya dari masalah kontekstual.
2. Menemukan, menggunakan dan menentukan luas daerah pada integral dari masalah kontekstual.
3. Menentukan volume benda tak beraturan, dengan menggunakan metode kulit tabung.

Pengantar Modul

Matematika bukan hanya ilmu yang mempelajari tentang bilangan dan pengoperasiannya, logika aljabar, bangun geometri, operasi trigonometri, deret aritmetika, dan operasi calculus. Namun lebih jauh dari itu, matematika lahir untuk memenuhi kebutuhan manusia dalam mengatasi permasalahan yang begitu rumit jika menggunakan Bahasa yang biasa. Oleh karena itu, seharusnya dengan menggunakan Bahasa matematika ini, bisa membantu manusia menyelesaikan masalah sehari-hari di lingkungan sekitar yang lebih rumit daripada biasanya.

Begitu juga dengan integral sebagai bagian dari operasi calculus, seharusnya bisa membantu mengatasi permasalahan manusia mengenai gerak benda, pertambahan penduduk, suku bunga perbankan, dan lainnya.
Seperti yang akan dipelajari dalam materi turunan, variabel dalam suatu fungsi mengalami penurunan pangkat. Integral merupakan bentuk operasi matematika yang menjadi kebalikan (invers) dari operasi turunan dan limit dari jumlah atau suatu luas daerah tertentu.
Definisi :
Integral merupakan antiturunan, sehingga jika terdapat fungsi F(x) yang kontinu pada interval $[a, b]$ diperoleh $\frac{d(F(x))}{dx} = F'(x) = f(x)$.
Antiturunan dari $f(x)$ adalah mencari fungsi yang turunannya merupakan $f(x)$, ditulis $\int f(x)\, dx$
Secara umum rumusnya adalah : $\int f(x)\, dx = \int F'(x)\, dx = F(x) + C$.

UNIT 1

LUAS DAERAH TAK BERATURAN

1.1 Pengertian Integral

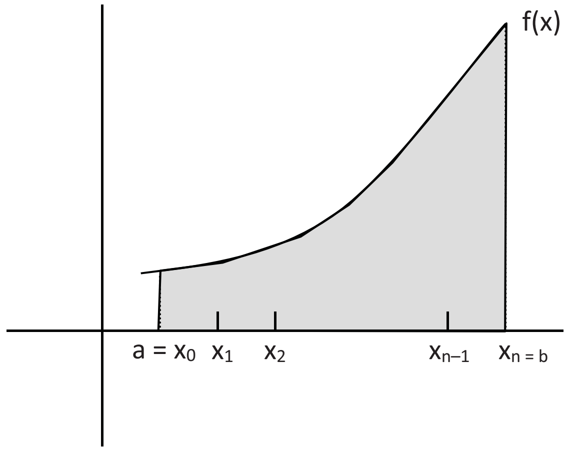
Integral merupakan bentuk operasi matematika yang menjadi kebalikan (invers) dari operasi turunan dan limit dari jumlah atau suatu luas daerah tertentu. Misalkan fungsi f terdefinisi pada selang I. Maka, fungsi F adalah suatu integral tak tentu atau anti turunan dari f apabila $F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ untuk semua x dalam I. Oleh karena itu, integral merupakan operasi kebalikan (invers) dari operasi turunan. Bagaimana mencari integral dari sebuah fungsi? Karena integral merupakan invers atau balikan dari turunan, maka beberapa rumus atau aturan menentukan integral tak tentu diperoleh melalui sifat turunan.

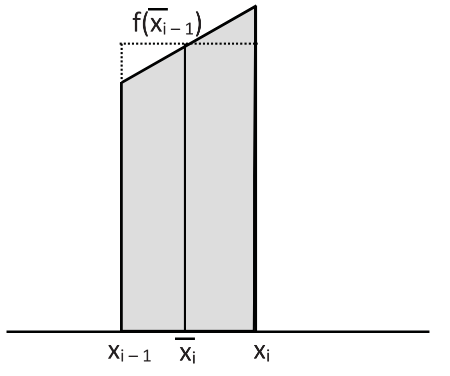
Pengertian lainnya, integral tentu yang berkaitan erat dengan luas daerah di bawah kurva. Misalkan fungsi f terdefinisi pada suatu selang. Pandang partisi (potongan) P pada selang [a, b] menjadi n bagian sehingga

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, \text{ dan andaikan}$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Pada selang $[x_{i-1}, x_i]$, ambil titik $\bar{x}_i$. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva f, garis x = a, garis x = b, dan sumbu x dapat dihampiri dengan menjumlah partisi-partisi tersebut.





Partisi P

Perhatikan pada partisi $[x_{i-1}, x_i]$, luas partisi tersebut dapat dihampiri oleh persegi panjang dengan lebar Δx_i dan panjang $f(\bar{x}_i)$, yaitu sebesar $A_i = f(\bar{x}_i).\Delta x_i$. Jadi, luas daerah di bawah kurva f pada selang [a, b] dapat dihampiri oleh:

$$R_P = A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

Jumlah ini disebut jumlah Riemann (untuk menghargai penemunya). Panjang partisi P, |P|, dapat dibuat sekecil mungkin dengan memperbesar n. Jadi, jika f fungsi yang terdefinisi pada selang [a, b] dan $\lim\limits_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$ ada maka dikatakan f terintegralkan pada [a, b]. Lebih lanjut, hasil ini disebut integral tentu (integral Riemann) fungsi f dari a ke b, dan dapat dinyatakan sebagai $\int_a^b f(x)dx$, yaitu:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

1.2 Integral Tak Tentu

Integral tak tentu seperti sebelumnya dijelaskan merupakan invers/kebalikan dari turunan. Turunan dari suatu fungsi, jika diintegralkan akan menghasilkan fungsi itu sendiri. Perhatikanlah contoh turunan-turunan dalam fungsi aljabar berikut ini:

- Turunan dari fungsi aljabar $y = x^3$ adalah $y' = 3x^2$
- Turunan dari fungsi aljabar $y = x^3 + 8$ adalah $y' = 3x^2$
- Turunan dari fungsi aljabar $y = x^3 + 17$ adalah $y' = 3x^2$
- Turunan dari fungsi aljabar $y = x^3 - 6$ adalah $y' = 3x^2$

Perhatikan tabel di bawah ini !

Pendiferensialan

F(x)	F′(x) = f(x)
$x^2 + 3x$	$2x + 3$
$x^2 + 3x + 2$	$2x + 3$
$x^2 + 3x - 6$	$2x + 3$
$x^2 + 3x + \sqrt{3}$	$2x + 3$
$x^2 + 3x + C$, dengan C = konstanta $\in R$	$2x + 3$

Pengintegralan

Berdasarkan tabel di atas dapat kita simpulkan bahwa dari F(x) yang berbeda diperoleh F′(x) yang sama, sehingga dapat kita katakan bahwa jika F′(x) = f(x) diketahui sama, maka fungsi asal F(x) yang diperoleh belum tentu sama karena bergantung pada konstanta C. Proses pencarian fungsi asal F(x) dari F′(x) yang diketahui disebut *operasi invers pendiferensialan (*anti turunan) dan lebih dikenal dengan nama operasi integral.

Seperti yang sudah dipelajari dalam materi turunan, variabel dalam suatu fungsi mengalami penurunan pangkat. Berdasarkan contoh tersebut, secara umum dapat dituliskan

$$f(x) = y = x^3 + C$$

Dengan nilai C konstan. Integral tak tentu dari suatu fungsi f dinotasikan sebagai:

$$\int f(x)dx$$

Pada notasi tersebut dapat dibaca integral terhadap x".notasi disebut integran. Secara umum integral dari fungsi f(x) adalah penjumlahan F(x) dengan C atau:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Karena integral dan turunan berkaitan, maka rumus integral dapat diperoleh dari rumusan penurunan. Jika turunan:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{(n+1)}x^{(n+1)} = ax^n$$

Maka rumus integral aljabar diperoleh melalui aturan pangkat berikut:

$$\int ax^n\,dx = \frac{a}{(n+1)}x^{n+1} + C$$

dengan syarat $.n \neq -1$

1.2.1 Sifat-sifat Integral Tak Tentu

Beberapa sifat operasi Integral Tak Tentu bersifat linear, yaitu:

1. $\int a\,dx = ax + C$; a adalah konstanta
2. $\int a\,f(x)dx = a\int f(x)dx$; a adalah konstanta
3. $\int ((f(x) + g(x)))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
4. $\int ((f(x) - g(x)))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

Perhatikan contoh berikut :

1. Selesaikan integral berikut :
   a. $\int (18x^8 - 25x^4 + 3x^2)dx$
   b. $\int (x+1)^2 dx$
   c. $\int (x-1)(x+2)dx$

Jawab :

a. $\int (18x^8 - 25x^4 + 3x^2)dx = \int 18x^8 dx - \int 25x^4 dx + \int 3x^2\, dx$

$= \frac{18}{8+1}x^{8+1} - \frac{25}{4+1}x^{4+1} + \frac{3}{2+1}x^{2+1}$

$= \frac{18}{9}x^9 - \frac{25}{5}x^5 + \frac{3}{3}x^3$

$= 2x^9 - 5x^5 + x^3 + C$

b. $\int (x+1)^2 dx = \int (x^2 + 2x + 1)dx$

$= \int x^2\, dx + \int 2x\, dx + \int 1\, dx$

$= \frac{1}{2+1}x^{2+1} + \frac{2}{1+1}x^{1+1} + x + C$

$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{2}x^2 + x + C$

$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C$

c. $\int (x-1)(x+2)dx = \int (x^2 + x - 2)dx$

$= \int x^2\, dx + \int x\, dx - \int 2\, dx$

$= \frac{1}{2+1}x^{2+1} + \frac{1}{1+1}x^{1+1} - 2x + C$

$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

2. Tentukan setiap integral berikut :
   a. $\int 2x^{-2}dx$
   b. $\int -\frac{3}{x^2}\, dx$
   c. $\int (\frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2})dx$

Jawab :

a. $\int 2x^{-2}dx = \frac{2}{-2+1}x^{-2+1} + C$

$= \frac{2}{-1}x^{-1} + C$

$= -2x^{-1} + C$

$= \frac{-2}{x} + C$

b. $\int -\frac{3}{x^2}\, dx = \int -3x^{-2}dx$

$= \frac{-3}{-2+1}x^{-2+1} + C$

$= \frac{-3}{-1}x^{-1} + C$

$= 3x^{-1} + C$

$= \frac{3}{x} + C$

c. $\int (\frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2})dx = \int \frac{2x^3}{x^2}dx - \int \frac{3x^2}{x^2}dx + \int \frac{1}{x^2}dx$

$= \int 2x\, dx - \int 3\, dx + \int x^{-2}dx$

$= \frac{2}{1+1}x^{1+1} - 3x + \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} + C$

$= \frac{2}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{-1}x^{-1} + C$

$= x^2 - 3x - x^{-1} + C$

$= x^2 - 3x - \frac{1}{x} + C$

Konstanta C dapat ditentukan nilainya apabila nilai variabel x dan F(x) dari $\int f'(x)dx$ telah diketahui.Nilai C diperoleh dengan mensubstitusi kedua nilai variabel yang bersesuaian tersebut ke dalam hasil pengintegralan. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut :

Contoh :
Diketahui *f'(x)* = 2x + 1 dan *f(3)* = 6. Tentukan fungsi *f(x)*
Jawab :

f(x) = $\int f'(x)dx$

$= \int (2x+1)\, dx$

$= \frac{2}{1+1}x^{1+1} + x + C$

$= \frac{2}{2}x^2 + x + C$

$= x^2 + x + C$

f(3) = 6

$3^2 + 3 + C = 6$

$9 + 3 + C = 6$

$12 + C = 6$

$C = 6 - 12$

$C = -6$

Jadi *f(x)* = $x^2 + x - 6$

Penerapan aturan pangkat yang diperumum.

Misalkan fungsi u = g(x) terdiferensial atau dapat diturunkan sehingga $\frac{du}{dx} = g'(x)$. Dengan menuliskan $du = g'(x)dx$, diperoleh

$$\int [g(x)]^r g'(x)dx = \int u^r du = \frac{u^{r+1}}{r+1} + C$$, di mana r bilangan real dan r ≠ -1.

Contoh 1

Tentukan:

a. $\int (x^4 - 3x)^{30}(4x^3 - 3)dx$

c. $\int (x^2/2 + 3)^2 x^2 dx$

b. $\int (x^2 + 4)^{10} x dx$

Penyelesaian.

a. Misalkan u = x^4 – 3x, maka du = ($4x^3$ – 3)dx. Akibatnya,

$$\int (x^4 - 3x)^{30}(4x^3 - 3)dx = \int u^{30} du$$

$$= \frac{u^{31}}{31} + C = \frac{(x^4 - 3x)^{31}}{31} + C$$

b. Misalkan u = x^2 + 4, maka du = 2xdx sehingga

$$\int (x^2 + 4)^{10} x dx = \int (x^2 + 4)^{10} (\tfrac{1}{2}) 2x dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \int (x^2 + 4)^{10} 2x dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \int u^{10} du = \tfrac{1}{2}(\frac{u^{11}}{11}) + C$$

$$= \frac{(x^2 + 4)^{11}}{22} + C$$

c. Pemisalan u = x^2/2 + 3 menghasilkan du = xdx. Tetapi, ini tidak bisa menghasilkan bentuk integral dengan variabel u. Jadi, kita menyelesaikan integral ini dengan aljabar biasa

$$\int (x^2/2 + 3)^2 x^2 dx = \int (x^4/4 + 3x^2 + 9)x^2 dx$$

$$= \int (x^6/4 + 3x^4 + 9x^2)dx$$

$$= \frac{x^7}{28} + \frac{3x^5}{5} + 3x^3 + C$$

Pada permasalahan di lingkungan kehidupan sehari-hari, Integral juga dapat menentukan kecepatan dan jarak suatu ketinggian benda yang bergerak dalam suatu pengaruh gravitasi, sehingga kecepatannya berubah-ubah sebagai fungsi terhadap waktu v (t)

Contoh 2

Percepatan gravitasi bumi adalah 9.8 m/det^2. Sebuah benda dilempar vertikal ke atas dari permukaan bumi dengan kecepatan 15 m/det. Tentukan kecepatan dan tingginya 1 detik kemudian.

Penyelesaian:

Kita asumsikan hambatan udara diabaikan sehingga gaya-gaya yang bekerja hanya gaya tarik bumi. Misalkan tingginya h ke arah atas, maka nilai kecepatan mula-mula (positif) adalah turunan dari h, yaitu:

$$v = \frac{dh}{dt}$$

Tetapi percepatan (turunan dari kecepatan), $a = \frac{dv}{dt}$ bernilai negatif karena tarikan gravitasi. Jadi, diperoleh

$$\frac{dv}{dt} = -9.8 \quad \Rightarrow \quad dv = -9.8dt$$

$$\Rightarrow \quad v = \int -9.8dt = -9.8t + C$$

Karena v = 15 pada t = 0, diperoleh

v (0) = 15 = -9.8(0) + C ⇒ C = 15

v (t) = -9.8t + 15

Akibatnya,

$$v = \frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = -9.8t + 15$$

$$\Rightarrow \quad dh = (-9.8t + 15)dt$$

$$\Rightarrow \quad h = \int (-9.8t + 15)dt$$

$$\Rightarrow \quad h = -4.9t^2 + 15t + C$$

Ketinggian h = 0 pada saat t = 0 sehingga C = 0. Jadi,

$$h(t) = -4.9t^2 + 15t$$

Pada t = 1, diperoleh

$v = -9.8(1) + 15 = 5.2$ m/det

$h = -4.9(1)^2 + 15(1) = 10.1$ meter

Penugasan 1: Tinggi dan Kecepatan Benda Melayang

Tujuan

Melalui pengoperasian integral bisa diketahui tinggi dan kecepatan benda melayang

Langkah kegiatan

1. Menggunakan bola, dilempar beberapa kali ke atas
2. Mencatat waktu dari saat bola dilempar, hingga tiba kembali di permukaan tanah
3. Dengan menggunakan persamaan h = v (t) dt dan v(t) = g dt, dimana g = 9,8 m/det^2
4. Hitung kecepatan awal dan akhir benda (bola), serta tinggi maksimum benda melayang

Latihan Soal 1:

1. Selesaikan setiap integral berikut:
   a. $\int 2\,dx$
   b. $\int 7x - 8\,dx$
   c. $\int 5x^4\,dx$
   d. $\int -9x^2\,dx$
   e. $\int x^{-3}\,dx$
2. Selesaikan setiap integral berikut:
   a. $\int \frac{x+3}{x^3}\,dx$
   b. $\int \frac{x(x^2+3)}{x^6}\,dx$
   c. $\int \frac{3x^4-4x^3+2}{x}\,dx$
   d. $\int (x^3 + \sqrt{x})\,dx$
   e. $\int (\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1)\,dx$
3. Diketahui $f'(y) = (y^2 + 4y + 3)^2$. Tentukan fungsi $f(y)$ jika:
   a. $f(2) = 50$
   b. $f(4) = 105$
   c. $f(3) = 135$
   d. $f(2) = 90$

1.2.2 Integral Tak Tentu fungsi trigonometri

1. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
2. $\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
3. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
4. $\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

Untuk mengerjakan integral fungsi trigonometri akan digunakan persamaan-persamaan sebagai berikut berikut ini:

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
3. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
4. $\sin x.\ \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$
5. $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{1}{2}x$
6. $1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{1}{2}x$

Contoh soal :

1. $\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C$
2. $\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$
3. $\int (2x^2 - 5x + 3)dx = \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x + C$

4. $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

5. $\int 4dx = 4x + C$

Latihan soal :

1. $\int (2-3x)^2 \, dx.$
2. $\int \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} \, dx$
3. $\int (1+\sqrt[3]{x}) \, dx.$
4. $\int \frac{2x-1}{x^2} \, dx.$
5. $\int x\sqrt{x} \, dx$
6. $\int 3x(x+1) \, dx.$
7. $\int (\cos x + \sin 2x) \, dx.$
8. $\int \cos^2 x \, dx.$
9. $\int \frac{dx}{3\sqrt{x^5}} \, dx.$
10. $\int 2\sin x \, dx.$

1.3 Integral Tertentu

Nilai Integral tertentu dicari melalui teorema dasar kalkulus berikut:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

dengan:

$f(x)$ adalah integran, yaitu $f(x) = F'(x)$

a, b adalah batas-batas pengintegralan

[a, b] adalah interval pengintegralan

Selain sifat integral tak tentu yang juga berlaku pada integral tertentu, terdapat sifat-sifat integral tertentu yang lain sebagai berikut:

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
2. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$
3. $\int_a^a f(x)dx = 0$
4. Kesimetrian:

   Jika f fungsi genap (simetri terhadap sumbu y), maka

   $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

   Jika f fungsi ganjil (simetri terhadap titik asal), maka

   $$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

5. Jika $f(x) \geq 0$ dalam interval $a \leq x \leq b$, maka $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

   Jika $f(x) \leq 0$ dalam interval $a \leq x \leq b$, maka $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

6. Diferensial terhadap batas atas. Misalkan f kontinu pada selang [a, b] dan x variabel dalam [a, b]. Maka,

   $$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$$

Bukti. Misalkan F anti turunan dari f, maka

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = \frac{d}{dx}[F(x) - F(a)]$$

$$= \frac{dF(x)}{dx} - 0 = f(x)$$

Contoh. Tentukan: (a). $\frac{d}{dx}\left[\int_1^x (3t^2+1)dt\right]$ (b). $\frac{d}{dx}\left[\int_1^{x^2} (3t^2+1)dt\right]$

Penyelesaian.

a. Batas atas x dan diferensial terhadap x. Secara langsung

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x (3t^2+1)dt\right] = f(x) = 3x^2 + 1$$

b. Batas atas x^2 dan diferensial terhadap x. Kita gunakan aturan rantai dan memisalkan $u = x^2$. Jadi,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^{x^2} (3t^2+1)dt\right] = \frac{d}{du}\left[\int_1^{u} (3t^2+1)dt\right].\frac{du}{dx}$$

$= (3u^2 + 1).2x = (3(x^2)^2 + 1).2x$

$= (3x^4 + 1).2x$

Contoh

Tentukan nilai integral berikut ini:

a. $\int_2^5 x^2 dx$
b. $\int_0^3 (3x^2 + 4x + 2)dx$
c. $\int_2^3 3x^2 dx + \int_3^5 3x^2 dx$

Jawab:

a. $\int_2^5 x^2 dx = \left[\frac{1}{2+1}x^{2+1}\right]_2^5$

$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^5$

$= \frac{1}{3}\left[5^3 - 2^3\right]_2^5$

$= \frac{1}{3}(125 - 8)$

$= \frac{1}{3}(117)$

$= 39$

Contoh soal :

1. $\int_{-2}^{2} x^3 \text{ dx} = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{2}$

$= \left[\frac{1}{4}(2)^4\right] - \left[\frac{1}{4}(-2)^4\right]$

$= (4 - 4) = 0$

2. $\int_0^2 (x^2 + 4x) \text{ dx} = \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2$

$= \left[\frac{1}{3}(2)^3 + 2(2)^2\right] - \left[\frac{1}{3}(0)^3 + 2(0)^2\right]$

$= (\frac{8}{3} + 8) - (0 + 0) = 10\ \frac{2}{3}$

Latihan Soal 2:

1. $\int_{-1}^{1} (1 - x^2) \text{ dx} = ...$

2 $\int_0^4 (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}) \text{ dx} = ...$

3 $\int_{-2}^{0} (2 - x) \text{ dx} = ...$

4. $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ dx} = ...$

5. Carilah nilai p bila, $\int_0^p (1 - x)\,\text{dx}$, p>0

1.4 Teknik Pengintegralan

1.4.1 Integral Substitusi

Pada bagian ini akan dibahas teknik integrasi yang disebut metode substitusi. Konsep dasar dari metode ini adalah dengan mengubah integral yang kompleks menjadi bentuk yang lebih sederhana.

Bentuk umum integral substitusi adalah sebagai berikut.

$$\int [f(u)\frac{du}{dx}]\, dx = f(u)du$$

Contoh soal :

a. Tentukan $\int 2x(x^2+3)^4\,dx$!

b. Tentukan $\int \sin^3 x.\cos x\;dx$!

Penyelesaian:

a. Misalkan $u = x^2+3$, maka $\frac{du}{dx} = 2x$ atau $dx = \frac{du}{2x}$

Sehingga diperoleh, $\int 2x(x^2+3)^4\,dx = \int 2x\,u^4\frac{du}{2x}$

$$= \int u^4 du$$

$$= \frac{1}{5}u^5 + C$$

$$= \frac{1}{5}(x^2+3)^5 + C$$

b. Misalkan $u = \sin x$, maka $\frac{du}{dx} = \cos x$ atau $dx = \frac{du}{\cos x}$

Sehingga diperoleh, $\int \sin^3 x.\cos x\;dx = \int u^3 \cos x\frac{du}{\cos x}$

$$= \int u^3 du$$

$$= \frac{1}{4}u^4 + C$$

$$= \frac{1}{4}\sin^4 x + C$$

1.4.2 Integral Parsial

Teknik integral parsial ini digunakan bila suatu integral tidak dapat diselesaikan dengan cara biasa maupun dengan cara substitusi. Prinsip dasar integral parsial adalah sebagai berikut.

$$y = u.v \rightarrow dy = du.v + u.dv$$

$$\int dy = \int v\,du + \int u\,dv$$

$$y = \int v\,du + \int u\,dv$$

$$u.v = \int v\,du + \int u\,dv$$

$$\int u\,dv = u.v - \int v\,du$$

pengintegralan parsial integral tak tentu

$$\int u\,v' = uv - \int u'v$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

pengintegralan parsial integral tertentu

$$\int_a^b u\,v' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

$$\int_a^b u\,dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\,du$$

Contoh soal :

Tentukan $\int x^2 \sin x\;dx$!

Penyelesaian:

Dengan menggunakan rumus $\int u\,dv = u.v - \int v\,du$

Misal : $u = x^2$, $\rightarrow du = 2xdx$

$dv = \sin x\;dx \rightarrow v = \int \sin xdx = -\cos x$

sehingga diperoleh, $\int x^2 \sin x\;dx = x^2.(-\cos x) - \int(-\cos x)2xdx$

$$= x^2.(-\cos x) + \int \cos x.2xdx$$

$$= -x^2.\cos x + 2\,(x.\sin x - \int \sin xdx\,)$$

$$= -x^2.\cos x + 2x.\sin x + 2\cos x + C$$

Selain cara di atas, dapat pula diselesaikan dengan cara sebagai berikut : untuk menentukan integral parsial bentuk $\int udv$, yang turunan ke-k dari u adalah 0 dan integral ke- k dari v selalu ada.

Latihan:

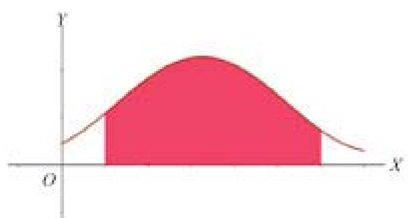
Selesaikan integral berikut dengan teknik substitusi atau integral parsial!

1. $\int x^2 \cdot \sin x^3 dx$
2. $\int 2x\sqrt{x^2-4}dx$
3. $\int \sqrt{x+7}dx$
4. $\int 3x(x-7)^5 dx$
5. $\int -2x.\cos(x+3)dx$
6. $\int 3x(x^2+5)^5 dx$
7. $\int 2x.\sin(x^2+3)dx$
8. $\int x^2 \cdot \sin x dx$
9. $\int -x\sqrt{x+7}dx$
10. $\int 3x \cdot \sin 6x dx$

1.5 Menentukan Luas Daerah

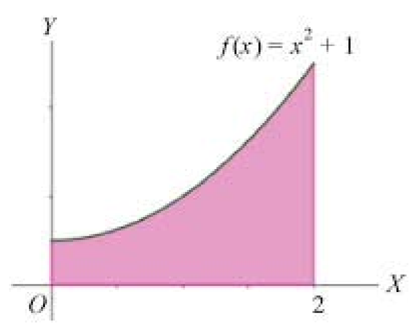
1.5.1 Proses Limit (Integral Riemann)

Kita sudah pasti tahu cara menentukan luas daerah bidang datar seperti persegi, persegi panjang, jajar genjang, dan bangun datar beraturan lainnya. Akan tetapi bagaimana cara menentukan luas daerah bidang datar yang berbentuk seperti gambar di bawah in?



Untuk menentukan luas daerah seperti gambar diatas maka kita bisa menggunakan defenisi integral tentu atau integral Riemann.

Perhatikan gambar berikut :

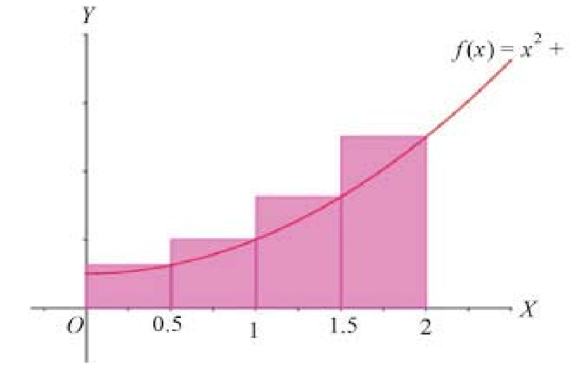


Kita akan menentukan luas daerah yang di arsir pada grafik di atas.

Pada interval [0,2] kita akan membagi menjadi sub-interval dengan lebar yang sama, misal kita akan membagi luas daerah yang di arsir tersebut menjadi empat bagian, maka :

$$\Delta x = \frac{2-0}{4} = 0{,}5$$

Dengan demikian kita akan menggambar persegi panjang pada gambar yang diarsir tersebut dengan masing-masing 1,5 satuan lebar dan tingginya diambil dari titik ujung persegi panjang sebelah kanan :



Mari tentukan luasnya berdasarkan gambar di atas. Pertama, lebar tiap persegi panjang adalah 1,5 dan kemudian tingginya di ambil dari nilai fungsi titik ujung persegi panjang sebelah kanan. Sehingga perkiraan luasnya adalah :

$f(x) = x^2 + 1$

L $= 0{,}5\,f(0{,}5) + 0{,}5\,f(1) + 0{,}5\,f(1{,}5) + 0{,}5\,f(2)$

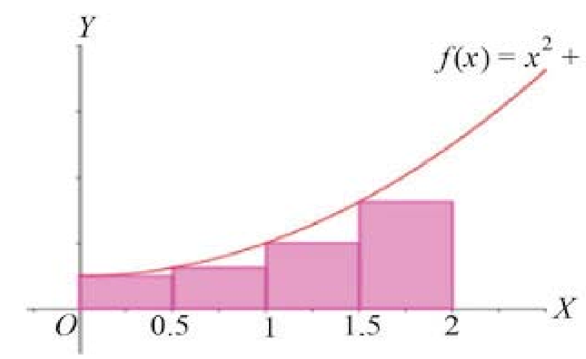
$= 0{,}5(1{,}25) + 0{,}5\,(2) + 0{,}5(3{,}25) + 0{,}5\,(5)$

$= 0{,}625 + 1 + 1{,}625 + 2{,}5$

$= 5{,}75$

diperoleh jika penghitungan berdasarkan titik ujung persegi panjang sebelah kanan luas daerahnya adalah 5,75 satuan luas.

Lalu, bagaimana jika penentuan luas daerah berdasarkan titik ujung persegi panjang sebelah kiri? Oke, perhatikan gambar berikut :



Sehingga perkiraan luas daerah tersebut adalah :

L $= 0{,}5\,f(0) + 0{,}5\,f(0{,}5) + 0{,}5\,f(1) + 0{,}5\,f(1{,}5)$

$= 0{,}5(1) + 0{,}5\,(1{,}25) + 0{,}5(2) + 0{,}5\,(3{,}25)$

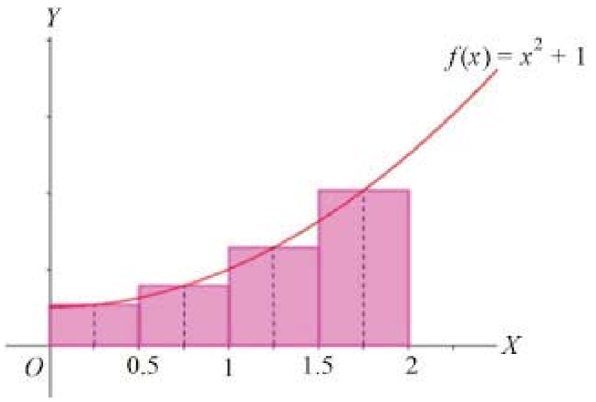
$= 0{,}5 + 0{,}625 + 1 + 1{,}625$

$= 3{,}75$

Bisa kita lihat perbedaan perkiraan luas di antara keduanya. Karena dengan penentuan luas daerah berdasarkan titik ujung persegi panjang sebelah kiri adanya ruang kosong yang bisa kita lihat di bawah grafik.

Lalu, ada satu lagi cara yang cukup akurat yaitu penentuan tinggi persegi panjang yang kita gambar berdasarkan titik tengah.

Perhatikan gambar berikut :



Maka, perkiraan luas daerah tersebut adalah :

$$\begin{aligned} L &= 0{,}5\,f(0{,}25) + 0{,}5\,f(0{,}75) + 0{,}5\,f(1{,}25) + 0{,}5\,f(1{,}75) \\ &= 0{,}5(1{,}0625) + 0{,}5\,(1{,}5625) + 0{,}5(2{,}5625) + 0{,}5\,(4{,}0625) \\ &= 0{,}53125 + 0{,}78125 + 1{,}28125 + 2{,}03125 \\ &= 4{,}625 \end{aligned}$$

Kita sekarang memperoleh tiga perkiraan luas yang berbeda. Maka perkiraan luas yang mendekati keakuratan adalah :

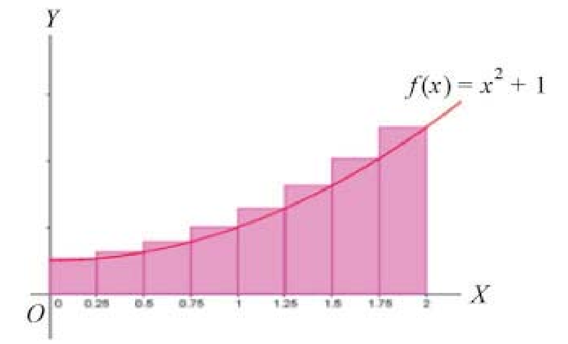
$$L = \frac{5{,}75+3{,}75+4{,}625}{3} = \frac{14{,}125}{3} = 4{,}708333$$

Dapat kita lihat perkiraan luas menggunakan aturan titik tengah lebih mendekati keakuratan daripada dua cara yang lain.

Lalu, bagaimana jika persegi panjang yang kita gambar untuk menaksir luas daerah yang diarsir tersebut kita perbanyak?

Misal kita akan menggambar delapan buah persegi panjang. Perhatikan masing-masing gambar berikut :

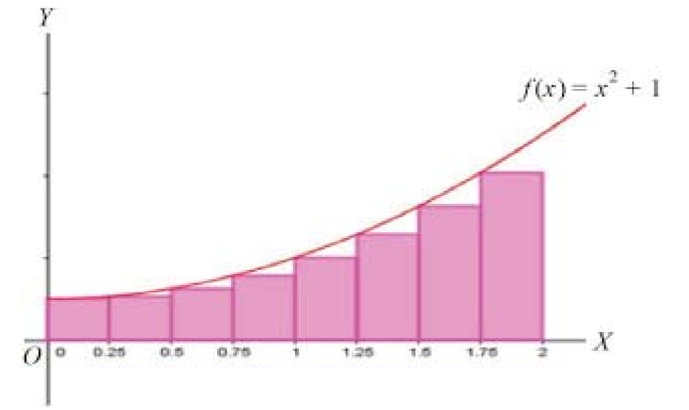
Dengan pendekatatan tinggi persegi panjang berdasarkan titik ujung sebelah kanan :



Perkiraan luas daerahnya adalah :

$$L = 5{,}19$$

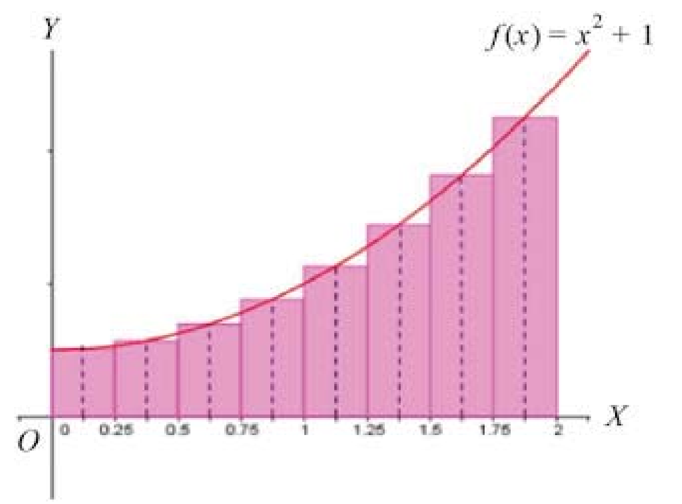
Dengan pendekatan tinggi persegi panjang berdasarkan titik ujung sebelah kiri :



Perkiraan luas daerahnya adalah :

$$L = 4{,}19$$

Terakhir, dengan pendekatan tinggi persegi panjang berdasarkan titik tengah :



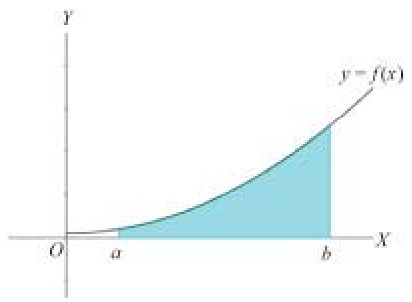
Perkiraan luas daerahnya adalah :

$$L = 4{,}66$$

Dapat kita lihat, memperbanyak jumlah persegi panjang yang kita gunakan untuk menghitung luas daerah pada grafik tersebut, maka akan lebih mengakuratkan perkiraan luas daerah yang kita peroleh.

Sekarang, mari kita jabarkan rumus umumnya.

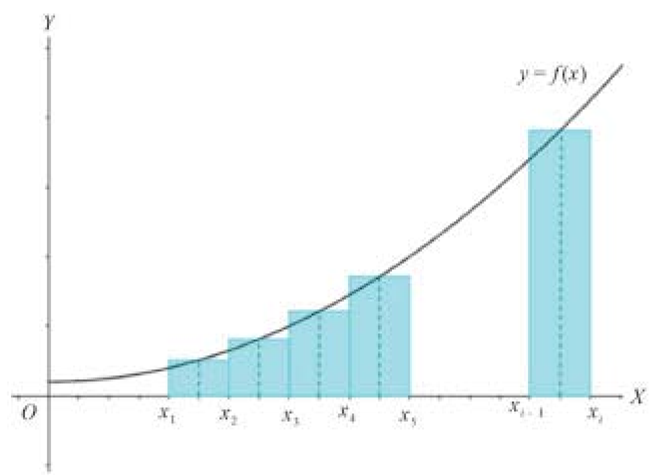
Misalkan y = *f*(x) adalah kurva kontinu dengan interval [a,b]



Dan kita akan menggambar persegi panjang sebanyak n buah, maka lebar tiap-tiap interval adalah:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Sehingga grafiknya menjadi :



Misalkan titik tengah pada persegi panjang ke-i adalah x_i* maka luas satu persegi panjang adalah :

$$L_i = f(x_i^*)\Delta x$$

Sehingga luas total daerah yang di arsir adalah luas total seluruh persegi panjang :

$L = L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_X$

$L = f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + f(x_3^*)\Delta x + \ldots + f(x_i^*)\Delta x$

Apabila menggunakan notasi sigma persamaan di atas dapat ditulis menjadi :

$$\boxed{L = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x}$$

Bentuk tersebut di kenal dengan jumlah Riemann.

Seperti yang sudah dijelaskan di atas, apabila subinterval (n) semakin banyak maka perkiraan luasnya semakin akurat.Jika n mendekati tidak terhingga maka luasnya semakin tepat. Dengan demikian luas daerah ditentukan dengan :

$$\boxed{L = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x}$$

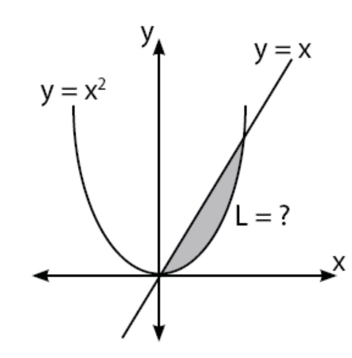
Bentuk di atas dapat disederhanakan menggunakan notasi integral:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx}$$

yang dinamakan sebagai **integral tentu** atau **integral Riemann.**

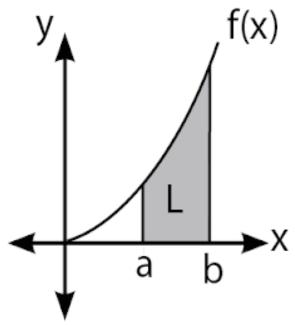
1.5.2 Menentukan Luas Daerah yang dibatasi Kurva

Luas daerah yang beraturan dapat dihitung menggunakan rumus yang sudah ditentukan, lalu bagaimana untuk luas daerah yang tidak beraturan?Solusinya adalah menghitung luas daerah dengan integral. Misalnya, luas persegi dapat dicari dengan menggunakan rumus sisi x sisi, persegi panjang dapat dicari dengan menggunakan rumus panjang x lebar, sedangkan luas yang dibatasi oleh kurva x^2 dan garis y = x dapat dihitung dengan menggunakan integral.



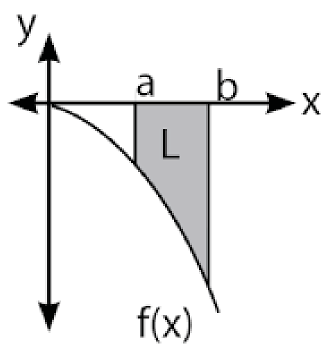
Berikut ini adalah aturan penggunaan aturan integral dalam mencari luas daerah yang dibatasi oleh kurva

Luas daerah yang dibatasi kurva f(x) pada selang a dan b di atas sumbu x



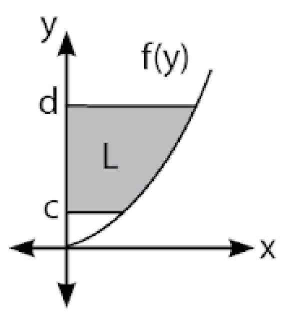
$$L = \int_a^b f(x)\,dx$$

Luas daerah yang dibatasi kurva f(x) pada selang a dan b di atas sumbu x



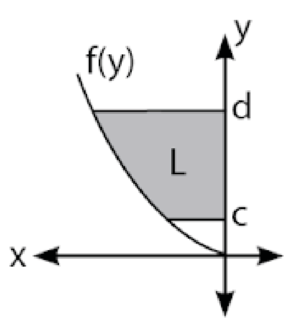
$$L = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Luas daerah yang dibatasi kurva f(x)pada selang c dan d di kanan sumbu y



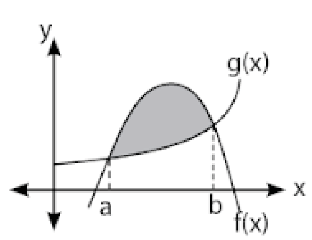
$$L = \int_c^d f(y)\,dy$$

Luas daerah yang dibatasi kurva f(x)pada selang c dan d di kiri sumbu y



$$L = -\int_c^d f(y)\,dy$$

Luas daerah yang dibatasi kurva f(x) dan g(x)



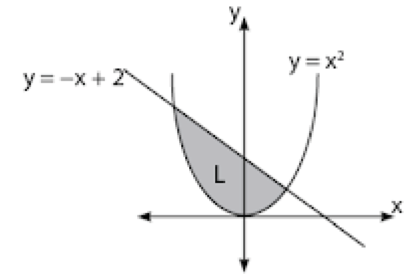
$$L = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Contoh:

Tentukan luas yang dibatasi oleh garis y = – x + 2 dan $y = x^2$!

Jawab:

Pertama, yang perlu dikerjakan adalah melihat daerah yang dibatasi kurva dengan menggambarkan sketsanya, seperti gambar berikut ini.



Selanjutnya adalah menentukan batas (titik perpotongan dua kurva)

$$y = y \to -x + 2 = x^2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)\,(\,x-1)$$

Sehingga diperoleh nilai x = -2 dan x = 1,

Jadi, luas yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan y = -x + 2 adalah

$$L = \int_{-2}^{1} (-x+2) - x^2 dx$$

$$= \int_{-2}^{1} -x^2 - x + 2dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{1}$$

$$= \left[\frac{8}{3} - 2 - 4\right] - \left[-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right]$$

$$= -\frac{19}{6}$$

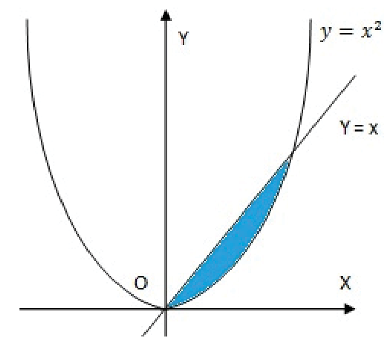
$$= \left|-3\tfrac{1}{6}\text{ satuan luas}\right|$$

$$= 3\frac{1}{6}\text{ satuan luas}$$

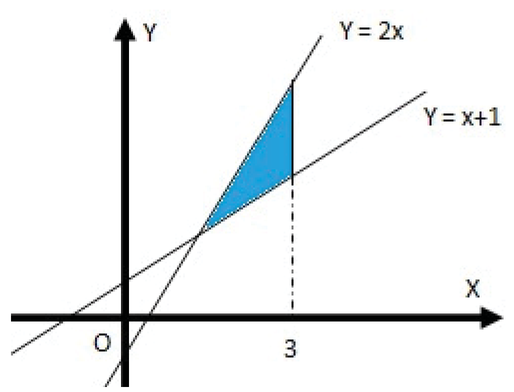
Latihan Soal 3:

1. Tentukan Luas daerah yang diarsir berikut!

a.



b.



2. Luas daerah yang dibatasi kurva f(x) = $-x^2 + 4x + 12$ dan g(x) = $x^2 - 2x - 8$ adalah......
3. Luas daerah yang dibatasi parabola $y = 8 - x^2$ dan garis $y = 2x$ adalah.....satuan luas
4. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 4 - x^2$ dan $y = -x + 2$ pada interval $0 \leq x \leq 3$ adalah....
5. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = -3x$ dan $y = 4 - x^2$ adalah…

Unit 2

Volume Benda Tak Beraturan

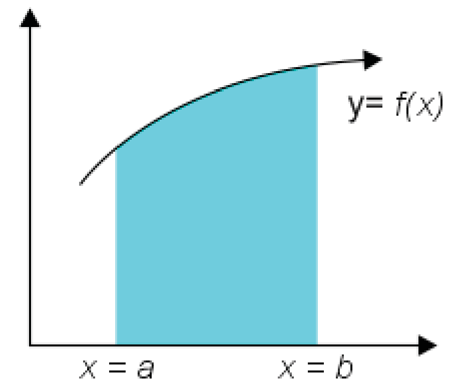
2.1 Menentukan Volume dengan Integral

Jika alas sebuah tabung dinyatakan dengan fungsi A(x) dan tinggi dari benda putar tersebut adalah panjang selang dari titik a ke b pada sumbu x atau y maka volume benda putar tersebut dapat dihitung dengan menggunakan rumus

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

Untuk mencari volume benda putar yang dihasilkan dari sebuah luasan yang diputar menurut sumbu x dan y dapat menggunakan cara seperti penjelasan berikut:

2.1.1 Volume Benda Putar terhadap Sumbu x yang dibatasi 1 Kurva

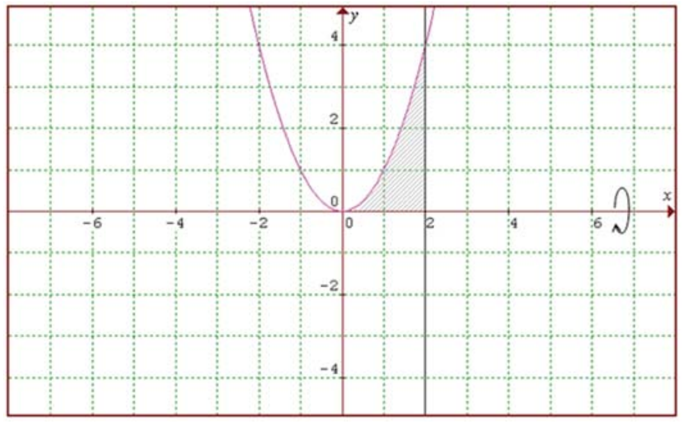


perhatikan gambar ilustrasi di atas. Luasan di bawah kurva y = f(x) jika diputar dengan sumbu putar dengan titik batas a dan b akan menghasilkan sebuah silinder dengan tinggi selisih b dan a. Volume benda putar menurut sumbu x tersebut dapat dicari dengan rumus

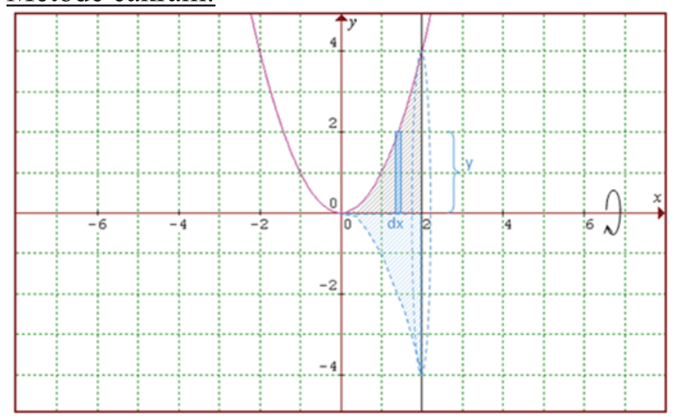
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Contoh 1:

Hitung volume benda putar yang terbentuk jika daerah yang dibatasi oleh kurva y = x^2, sumbu x, dan $0 \leq x \leq 2$ diputar terhadap sumbu x



Metode cakram:



$$Vx = \pi\int_0^2 y^2\,dx$$

$$= \pi\int_0^2 \left(x^2\right)^2 dx$$

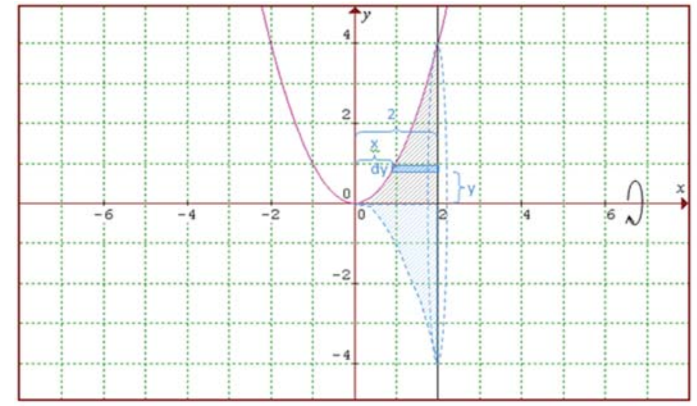
$$= \pi\int_0^2 x^4\,dx$$

$$= \pi\left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^2$$

$$= \pi\left[\left(\frac{1}{5}.2^5\right)-\left(\frac{1}{5}.0^5\right)\right]$$

$$= \frac{32}{5}\pi - 0 = 6\frac{2}{5}\pi \text{ satuan volume}$$

Metode cincin silinder:



$y = x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{y}$

karena daerah yang diarsir ada di sebelah kanan sumbu x, maka dipilih $x = \sqrt{y}$

$$Vx = 2\pi\int_0^4 y(2-x)dy$$

$$= 2\pi\int_0^4 y\left(2-\sqrt{y}\right)dy$$

$$= 2\pi\int_0^4 \left(2y - y^{\frac{3}{2}}\right)dy$$

$$= 2\pi\left[y^2 - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^4$$

$$= 2\pi\left[\left(4^2 - \frac{2}{5}.4^{\frac{5}{2}}\right)-\left(0^2 - \frac{2}{5}.0^{\frac{5}{2}}\right)\right] \quad **4^{\frac{5}{2}} = \left(2^2\right)^{\frac{5}{2}} = 2^5 = 32$$

$$= 2\pi\left(16 - \frac{64}{5} - 0 + 0\right) = 2\pi\left(\frac{80}{5} - \frac{64}{5}\right) = 2\pi.\frac{16}{5}$$

$$= \frac{32}{5}\pi = 6\frac{2}{5}\pi \text{ satuan volume}$$

2.1.2 Volume Benda Putar terhadap Sumbu y yang dibatasi 1 Kurva

Untuk volume benda putar dengan sumbu putar adalah sumbu y, soba harus mengubah persamaan grafik yang semula y yang merupakan fungsi dari x menjadi kebalikannya x menjadi fungsi dari y.

y = f(x) menjadi ***x = f(y)***.

Misalkan

$y = x^2$

$x = \sqrt{y}$

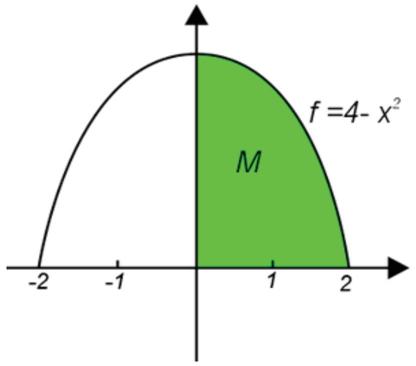
Setelah persamaan diubah ke bentuk x = f(y) kemudian dimasukkan ke rumus:

$$V = \pi\int_a^b (f(y))^2\,dy$$

Contoh Soal

Tentukan volume dari benda putar jika daerah yang dibatasai oleh fungsi $f(x) = 4 - x^2$, sumbu x, dan sumbu y diputar 360º terhadap:

a. sumbu x
b. sumbu y



$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_0^2 (4 - x^2)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 (4 - x^2)(4 - x^2) dx$$

$$= \pi \int_0^2 (16 - 8x^2 + x^4) dx$$

$$= \pi \left[16x - \frac{8}{2+1} x^{2+1} + \frac{1}{4+1} x^{4+1} \right]_0^2$$

$$= \pi \left[16x - \frac{8}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 \right]_0^2$$

$$= \pi \left[16(2) - \frac{8}{3}(2^3) + \frac{1}{5}(2^5) \right] - 0$$

$$= \pi \left[32 - \frac{8}{3}(8) + \frac{1}{5}(32) \right] - 0$$

$$= \pi \left[32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right] - 0$$

$$= \pi \left[\frac{480}{15} - \frac{320}{15} + \frac{96}{15} \right] - 0$$

$$= \frac{256}{15} \pi \text{ satuan volume}$$

Jadi volume benda putar jika luasnya M diputar mengelilingi sumbu x sebesar 360º adalah $\frac{256}{15}\pi$ satuan volume

2.2 Metode Kulit Tabung

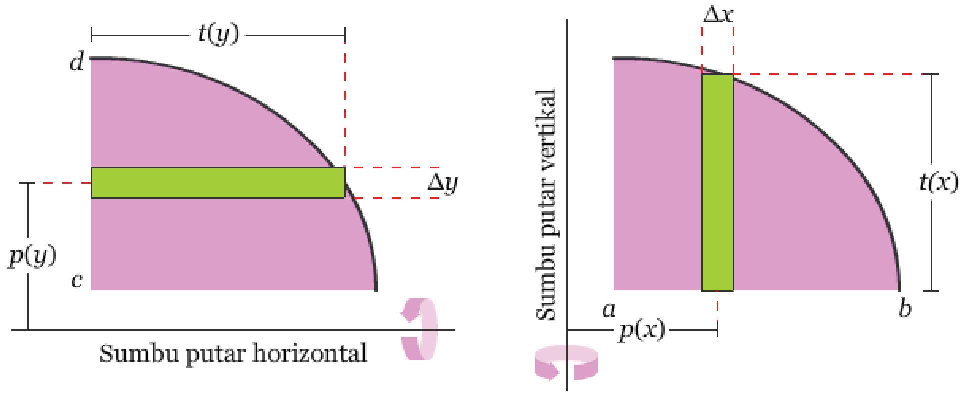
Untuk menentukan volume benda putar dengan metode kulit tabung, gunakan salah satu dari rumus berikut, seperti yang ditunjukkan oleh gambar di bawahnya.

Sumbu putarnya horizontal,

$$V = 2\pi \int_c^d [p(y)t(y)]dy.$$

Sumbu putarnya vertikal,

$$V = 2\pi \int_a^b [p(x)t(x)]dx.$$



Untuk lebih memahami dalam menentukan volume benda putar dengan menggunakan metode kulit tabung, perhatikan beberapa contoh berikut.

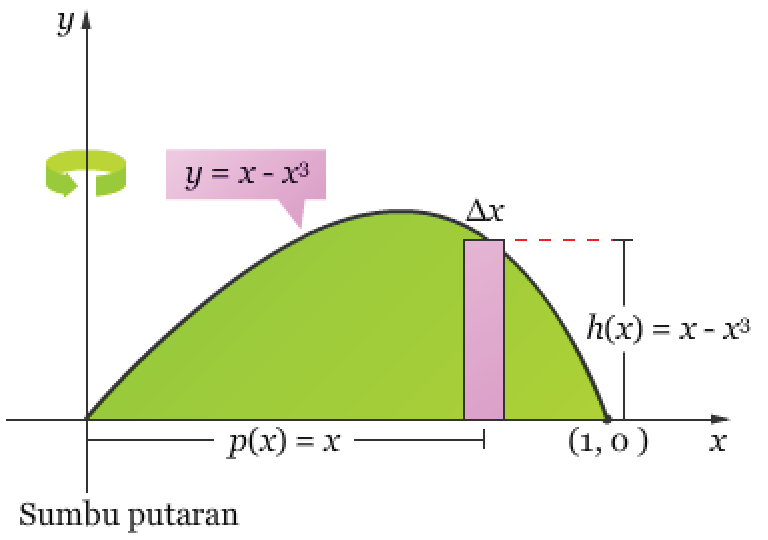
2.2.1 Volume Benda Putar Terhadap Sumbu x

Tentukan volume benda putar yang dibentuk oleh putaran daerah yang dibatasi oleh

$$y = x - x^3$$

dan sumbu-x ($0 \le x \le 1$) dengan sumbu putarannya adalah sumbu-y.

Pembahasan Karena sumbu putarannya vertikal, gunakan persegi panjang vertikal, seperti yang ditunjukkan oleh gambar di bawah.



Ketebalan Δx mengindikasikan bahwa x merupakan variabel dalam proses integrasi yang akan dilakukan. Jarak antara pusat persegi panjang dengan sumbu putaran adalah $p(x) = x$, dan tingginya adalah

$$h(x) = x - x^3$$

Karena rangenya antara 0 sampai 1, maka volume benda putar yang terbentuk dapat ditentukan sebagai berikut.

$$V = 2\pi \int_e^d p(x)h(x)dy = 2\pi \int_0^1 x(x - x^3)dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x^2 - x^4 dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right]$$

$$= \frac{4\pi}{15}$$

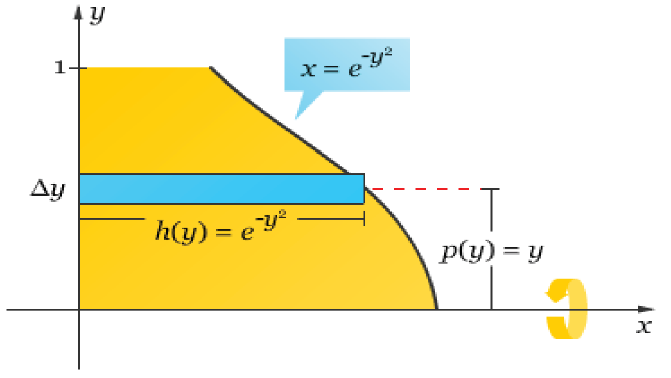
2.2.2 Volume Benda Putar Terhadap Sumbu y

Tentukan volume benda putar yang dibentuk oleh putaran daerah yang dibatasi oleh

$$x = e^{-y^2}$$

dan sumbu-y ($0 \le y \le 1$) dengan sumbu-x sebagai sumbu putarnya.

Pembahasan Karena sumbu putarannya horizontal, gunakanlah persegi panjang horizontal, seperti yang ditunjukkan gambar di bawah ini.



Jarak antara pusat persegi panjang dan sumbu putarannya adalah $p(y) = y$, dan panjang dari persegi panjangnya adalah

$$h(y) = e^{-y^2}$$

Karena range dari y adalah 0 sampai 1, maka volume benda putarnya dapat ditentukan sebagai berikut.

$$V = 2\pi \int_e^d p(y)h(y)dy = 2\pi \int_0^1 y\left(e^{-y^2}\right)dy$$

$$= -\pi\left[e^{-y^2}\right]_0^1$$

$$= \pi\left[1 - \frac{1}{e}\right]_0^1$$

$$\approx 1{,}986$$

Penugasan 2: Volume Mangkok
Tujuan
Menentukan volume pada benda berbentuk mangkok melalui pengoperasian integral
Langkah kegiatan
1. Ukur Jari-jari mangkok tersebut
2. Buatlah persamaan lingkaran berdasarkan jari-jari mangkok
3. Hitunglah volume mangkok tersebut

Penerapan integrak sangat luas tidak terbatas pada penentuan luas daerah dan volume benda putar, tetapi banyak masalah sehari-hari yang menerapkan integral seperti jarak yang ditempuh benda bergerak, jumlah populasi manusia, hewan dan tumbuhan, ekonomi, fisika dan di matematika itu sendiri.
Contoh.
Sebuah benda bergerak dengan kecepatan v = 25 – t, di mana kecepatan v dalam meter/detik dan t dalam detik. Pada saat t = 6 detik, posisi benda berada pada jarak 120 meter dari titik asal. Tentukan posisi benda sebagai fungsi waktu.

Jawab.

Posisi benda (S) sebagai fungsi dari waktu adalah integral dari kecepatan sehingga diperoleh

$S(t) = \int v\,dt = \int (25 - t)\,dt = 25t - 1/2t^2 + C$, C konstan

Jadi, $S(6) = 25(6) - 1/2(6)^2 + C = 120$ sehingga diperoleh $C = 120 - 150 + 18 = -12$

$S(t) = 25t - 1/2t^2 - 12$

Latihan :

1. Volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh $y = 3x, x = 2\ dan\ y = 0$ yang diputar 360^o terhadap sumbu X adalah …. satuan.
2. Volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 1 - x^2$, garis $y = 1 - x$, diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360^o adalah …. satuan volume.
3. Volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibiatasi oleh garis y=xy=x, garis y=3y=3, sumbu yy mengelilingi sumbu Y sejauh 360^o adalah…
4. Volume benda putar yang terjadi jika darah yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$, dengan $x = 4$, $y = 0$ mengelilingi sumbu Y sebesar 360^oadalah…
5. Gambarlah daerah yang dibatasi oleh kurva - kurva berikut yang diputar 360 derajat mengelilingi sumbu x, kemudian tentukan volumenya.
   a. $y = x^2 + 1$, sumbu x, sumbu y, dan garis x=1
   b. $y = \frac{4}{x}$, x = 2, x = 4 , dan sumbu x

Rangkuman

Integral merupakan bentuk operasi matematika yang menjadi kebalikan (invers) dari operasi turunan dan limit dari jumlah atau suatu luas daerah tertentu. Berdasarkan pengertian tersebut ada dua hal yang dilakukan dalam integral sehingga dikategorikan menjadi 2 jenis integral.

Pertama, integral sebagai invers/ kebalikan dari turunan disebut sebagai Integral Tak Tentu. Kedua, integral sebagai limit dari jumlah atau suatu luas daerah tertentu disebut integral tentu.

$$\int dx$$

Integral Tak Tentu

Maka rumus integral aljabar diperoleh:

$$\int ax^n\,dx = \frac{a}{(n+1)}x^{n+1} + C$$, dengan syarat $n \neq -1$

Sifat-sifat Integral Tak Tentu

Beberapa sifat Integral Tak Tentu adalah sebagai berikut :

1. $\int a\,dx = ax + C$; a adalah konstanta
2. $\int a\,f(x)dx = a\int f(x)dx$; a adalah konstanta
3. $\int \big((f(x) + g(x))\big)\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
4. $\int ((f(x) - g(x)))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

Integral Tertentu

Integral tertentu dinotasikan dengan

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Keterangan:

$f(x)$ adalah integran, yaitu $f(x) = F'(x)$

a, b adalah batas-batas pengintegralan

[a, b] adalah interval pengintegralan

Selain sifat integral tak tentu yang juga berlaku pada integral tertentu, terdapat sifat-sifat integral tertentu yang lain sebagai berikut:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Jika $f(x) \geq 0$ dalam interval $a \leq x \leq b$, maka $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

Jika $f(x) \leq 0$ dalam interval $a \leq x \leq b$, maka $\int_a^b f(x)dx \leq 0$

Integral Substitusi

Pada bagian ini akan dibahas teknik integrasi yang disebut metode substitusi. Konsep dasar dari metode ini adalah dengan mengubah integral yang kompleks menjadi bentuk yang lebih sederhana.

Bentuk umum integral substitusi adalah sebagai berikut.

$$\int [f(u)\frac{du}{dx}]\, dx = f(u)du$$

Integral Parsial

Teknik integral parsial ini digunakan bila suatu integral tidak dapat diselesaikan dengan cara biasa maupun dengan cara substitusi. Prinsip dasar integral parsial adalah sebagai berikut.

$$y = u.v \rightarrow dy = du.v + u.dv$$

$$\int dy = \int v\, du + \int u\, dv$$

$$y = \int v\, du + \int u\, dv$$

$$u.v = \int v\, du + \int u\, dv$$

$$\int u\, dv = u.v - \int v\, du$$

pengintegralan parsial integral tak tentu

$$\int u\, v' = uv - \int u'v$$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

pengintegralan parsial integral tertentu

$$\int_a^b u\, v' = \int_a^b \quad - \int_a^b u'v$$

$$\int_a^b u\, dv = [uv]_a^b - \int_a^b v\, du$$

Menentukan Luas Daerah dengan menggunakan Proses Limit (Integral Riemann). Dengan demikian luas daerah ditentukan dengan :

$$\int_a^b f(x)dx$$

Bentuk di atas dapat disederhanakan menggunakan notasi integral:

$$\int_a^b f(x)dx$$

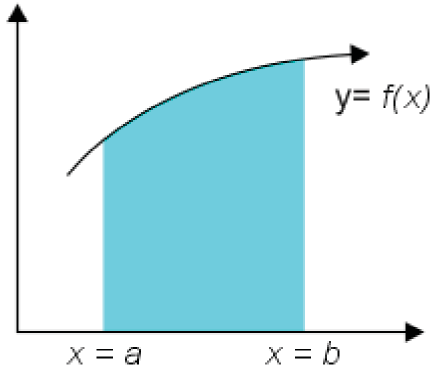
yang dinamakan sebagai **integral tentu** atau **integral Riemann.**

Volume benda tak Beraturan untuk menentukan Volume dengan Integral, jika alas sebuah tabung dinyatakan dengan fungsi A(x) dan tinggi dari benda putar tersebut adalah panjang selang dari titik a ke b pada sumbu x atau y maka volume benda putar tersebut dapat dihitung dengan menggunakan rumus

$$\boldsymbol{V = \int_a^b A(x)dx}$$

Untuk mencari volume benda putar yang dihasilkan dari sebuah luasan yang diputar menurut sumbu x dan y dapat menggunakan cara seperti penjelasan berikut:

Volume Benda Putar terhadap Sumbu x yang dibatasi 1 Kurva



perhatikan gambar ilustrasi di atas. Luasan di bawah kurva y = f(x) jika diputar dengan sumbu putar dengan titik batas a dan b akan menghasilkan sebuah silinder dengan tinggi selisih b dan a. Volume benda putar menurut sumbu x tersebut dapat dicari dengan rumus

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Volume Benda Putar terhadap Sumbu y yang dibatasi 1 Kurva
Untuk volume benda putar dengan sumbu putar adalah sumbu y, soba harus mengubah persamaan grafik yang semula y yang merupakan fungsi dari x menjadi kebalikannya x menjadi fungsi dari y.

y = f(x) menjadi ***x = f(y)***.

Misalkan
$y = x^2$
$x = \sqrt{y}$

Setelah persamaan diubahf kebentuk x = f(y) kemudian dimasukkan ke rumus:

$$V = \pi \int_a^b (f(y))^2 dy$$

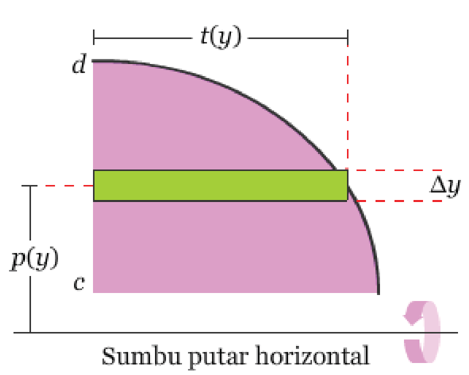
Metode Kulit Tabung, untuk menentukan volume benda putar dengan metode kulit tabung, gunakan salah satu dari rumus berikut, seperti yang ditunjukkan oleh gambar di bawahnya.

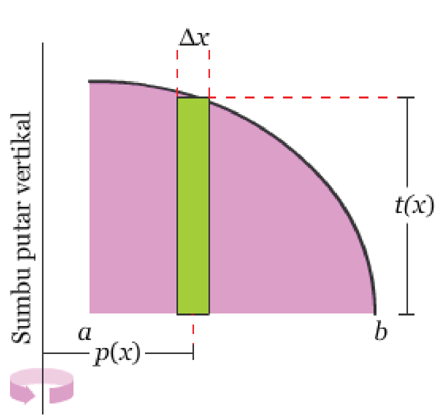
Sumbu putarnya horizontal,

$$V = 2\pi \int_c^d [p(y)t(y)]dy.$$

Sumbu putarnya vertikal,

$$V = 2\pi \int_a^b [p(x)t(x)]dx.$$





Saran Referensi

Buku teks Matematika Kurikulum 2013 SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI, Erlangga, 2014
Kalkulus Diferensial dan Integral. Teori & Aplikasi, Dr.Ir.Sudaryono.M.Pd, Prenada Media, 2017

Kriteria Pindah/Lulus Modul

Anda dinyatakan memahami modul ini atau dapat berpindah ke modul berikutnya apabila telah memenuhi salah satu persyaratan berikut.

1. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan secara lengkap, benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan
2. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, minimal sebesar 75%
3. Mampu mengerjakan test penempatan untuk modul ini dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, minimal sebesar 75%

Anda dinyatakan belum memahami dan menguasai modul ini dan belum dapat berpindah ke modul berikutnya apabila:

1. Mampu mengerjakan tugas dan soal latihan dengan benar, akurat dan sesuai prosedur pengerjaan, di bawah sebesar 75%
2. Mengikuti test penempatan dengan hasil di bawah 75%

Kunci Jawaban :

Latihan Soal 1:

1. Selesaikan setiap integral berikut:

$a. \int 2\,dx = 2x + C$

$b. \int 7x - 8\,dx = \frac{7}{2}x^2 - 8x + C$

$c. \int 5x^4\,dx = \frac{5}{5}x^5 + C = x^5 + C$

$d. \int -9x^2\,dx = \frac{-9}{3}x^3 + C = -3x^3 + C$

$e. \int x^{-3}\,dx = \frac{1}{-2}x^{-2} + C$

2. Selesaikan setiap integral berikut:

$$a. \int \frac{x+3}{x^3}\,dx = \int \frac{x}{x^3}\,dx + \int \frac{3}{x^3}dx$$
$$= \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{3}{x^3}\,dx$$
$$= \int x^{-2}dx + \int 3x^{-3}dx$$
$$= \frac{1}{-1}x^{-1} + \frac{3}{-2}x^{-2} + C$$
$$= -x^{-1} + \frac{3}{-2}x^{-2} + C$$

$$b. \int \frac{x(x^2+3)}{x^6}\,dx = \int \frac{x^3+3x}{x^6}dx$$
$$= \int \frac{1}{x^6}\,dx + \int \frac{3}{x^5}\,dx$$
$$= \int x^{-6}\,dx + \int 3x^{-5}\,dx$$
$$= \frac{1}{-5}x^{-5} + \frac{3}{-4}x^{-4} + C$$

$$c. \int \frac{3x^4 - 4x^3 + 2}{x}\,dx = \int 3x^3 - 4x^2 + 2x^{-1}dx$$
$$= \int 3x^3\,dx - \int 4x^2\,dx + \int 2x^{-1}\,dx$$
$$= \frac{3}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 0 + C$$

$$d. \int (x^3 + \sqrt{x})\,dx = \int \left(x^3 + x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$= \int x^3\,dx + \int x^{\frac{1}{2}}\,dx$$
$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$e. \int (\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1)\,dx = \int \frac{1}{2}x^2\,dx + \int \frac{2}{3}x\,dx - \int dx$$
$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}x^3 + \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}}x^2 - x + C$$
$$= \frac{3}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x + C$$

3. Diketahui $f'(y) = (y^2 + 4y + 3)^2$. Tentukan fungsi $f(y)$ jika:

$$\int f'(y)\,dy = \int (y^2 + 4y + 3)^2\,dy = \int y^4 + 4y^2 + 9\,dy$$
$$= \frac{1}{5}y^5 + \frac{4}{3}y^3 + y + C$$

$f(2) = 50$

$$= \tfrac{1}{5}(2)^5 + \tfrac{4}{3}(2)^3 + 2 + C = 50$$
$$= \tfrac{1}{5}(32) + \tfrac{4}{3}(8) + 2 + C = 50$$
$$= \frac{32}{5} + \frac{32}{3} + 2 + C = 50$$
$$= \frac{96}{15} + \frac{160}{15} + \frac{30}{15} + C = 50$$
$$= \frac{286}{15} + C = 50$$
$$C = \frac{750}{15} - \frac{286}{15}$$
$$C = \frac{464}{15}$$
$$Jadi: \frac{1}{5}y^5 + \frac{4}{3}y^3 + y + \frac{464}{15}$$

$f(4) = 105$

$$= \tfrac{1}{5}(4)^5 + \tfrac{4}{3}(4)^3 + 4 + C = 105$$
$$= \tfrac{1}{5}(1024) + \tfrac{4}{3}(64) + 4 + C = 105$$
$$= \frac{1024}{5} + \frac{256}{3} + 4 + C = 105$$
$$= \frac{3072}{15} + \frac{1280}{15} + \frac{60}{15} + C = 50$$

$$= \frac{4412}{15} + C = 105$$

$$C = \frac{1575}{15} - \frac{4412}{15}$$

$$C = -\frac{2837}{15}$$

$$Jadi: \frac{1}{5}y^5 + \frac{4}{3}y^3 + y + \frac{2837}{15}$$

f(3) = 135

$$= \tfrac{1}{5}(3)^5 + \tfrac{4}{3}(3)^3 + 3 + C = 135$$

$$= \tfrac{1}{5}(243) + \tfrac{4}{3}(27) + 2 + C = 135$$

$$= \frac{243}{5} + \frac{108}{3} + 2 + C = 135$$

$$= \frac{243}{5} + 36 + 2 + C = 135$$

$$= \frac{243}{5} + 38 + C = 135$$

$$= \frac{243}{5} + \frac{190}{5} + C = 135$$

$$= \frac{433}{5} + C = 135$$

$$C = \frac{675}{5} - \frac{433}{5}$$

$$C = \frac{242}{5}$$

$$Jadi: \frac{1}{5}y^5 + \frac{4}{3}y^3 + y + \frac{242}{5}$$

f(2) = 90

$$= \tfrac{1}{5}(2)^5 + \tfrac{4}{3}(2)^3 + 2 + C = 90$$

$$= \tfrac{1}{5}(32) + \tfrac{4}{3}(8) + 2 + C = 90$$

$$= \frac{32}{5} + \frac{32}{3} + 2 + C = 90$$

$$= \frac{96}{15} + \frac{160}{15} + \frac{30}{15} + C = 90$$

$$= \frac{286}{15} + C = 90$$

$$C = \frac{1350}{15} - \frac{286}{15}$$

$$C = \frac{1064}{15}$$

$$Jadi: \frac{1}{5}y^5 + \frac{4}{3}y^3 + y + \frac{1064}{15}$$

Latihan Soal 2:

1. $\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\ dx = \int_{-1}^{1} \left(x - \tfrac{1}{3}x^3\right) dx = \left[x\ \ + \frac{1}{3}x^2\right]_{-1}^{1}$

$$= \left[(1)\ \ + \frac{1}{3}(1)^2\right] - \left[(-1)\ \ + \frac{1}{3}(-1)^2\right]$$

$$= \left[1\ \ + \frac{1}{3}\right] - \left[(-1)\ \ + \frac{1}{3}\right] = \left[\frac{3}{3}\ \ + \frac{1}{3}\right] - \left[(-\frac{3}{3})\ \ + \frac{1}{3}\right] =$$

$\frac{4}{3} + \frac{3}{3} - \frac{1}{3} = 2$

2 $\int_{0}^{4} (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})\ dx = \int_0^4 \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right) dx = \int_0^4 \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right) dx = \left[x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right]_0^4 = \left((4)^{\frac{1}{2}} + (4)^{-\frac{1}{2}}\right) - \left((0)^{\frac{1}{2}} + (0)^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(\sqrt{4} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right) - 0 = \left(2 + \frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{2}$

3 $\int_{-2}^{0} (2 - x)\ dx = \int_{-2}^{0} \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \left[2x - \frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^{0} = \left((0)^{\frac{1}{2}} + (0)^{-\frac{1}{2}}\right) - \left((-2)^{\frac{1}{2}} + (-2)^{-\frac{1}{2}}\right) = 0 - (-2^0) = 1$

4. $\int_{0}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^4 x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \int_0^4 \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}\, dx = \int_0^4 2x^{\frac{1}{2}}\, dx\ \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_0^4 = \left(2(4)^{\frac{1}{2}} - 2(0)^{\frac{1}{2}}\right) = \left(2(\sqrt{4}\right) = 2 \text{ x } 2 = 4$

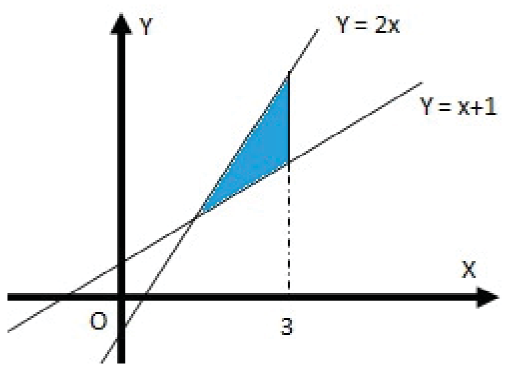
5. Carilah nilai p bila, $\int_0^p (1-x)\,dx$, p>0

$$\int_0^p (1-x) = \left[x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^p = \left(p-\tfrac{1}{2}p^2\right)-\left(0-\tfrac{1}{2}0^2\right) = p-\tfrac{1}{2}p^2-0 = 2p-p^2 = p(2-p)$$

$p=0$ atau $p=2$

Latihan Soal 3:

1. Tentukan Luas daerah yang diarsir berikut!



a. Parabola $y = x^2$ dan garis $y = x$

$y_1 = y_2$ maka:

$x^2 = x$

$x^2 - x = 0$

$x(x-1) = 0$

$x = 0 \; atau \; x = 1$

Batas integral : 0 sampai 1

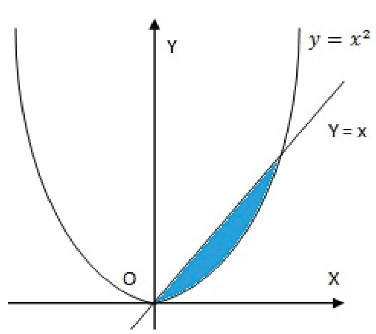
$\int_0^1 (x^2 - x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$= (\frac{1}{3}(1)^3 + \frac{1}{2}(1)^2) - (\frac{1}{3}(0)^3 + \frac{1}{2}(0)^2)$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

$= \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$ satuan luas

b. $y = 2x$ dan $y = x + 1$



$y_1 = y_2$ maka:

$2x = x + 1$

$2x - x - 1 = 0$

$x - 1 = 0$

$x = 1$ dan dibatasi oleh garis $x = 3$

Batas integralnya : 1 sampai 3

$\int_1^3 (2x - x - 1)dx = \left[x^2 + \frac{1}{2}x^2 - x\right]_1^3$

$= ((3)^2 + \frac{1}{2}(3)^2 - (3)) - ((1)^2 + \frac{1}{2}(1)^2 - (1))$

$= (9 + \frac{9}{2} - 3) - (1 + \frac{1}{2} - 1)$

$= (9 - 3 - 1 + 1 + \frac{9}{2} - \frac{1}{2})$

$= (6 + \frac{8}{2})$

$= 6 + 4$

$= 10$ satuan luas

2. Luas daerah yang dibatasi kurva $f(x) = -x^2 + 4x + 12$ dan $g(x) = x^2 - 2x - 8$ adalah......

$f(x) = -x^2 + 4x + 12$

$g(x) = x^2 - 2x - 8$

Mencari titik potong kurva

$f(x) = g(x)$

$-x^2 + 4x + 12 = x^2 - 2x - 8$

$-x^2 - x^2 + 4x + 2x + 12 + 8 = 0$

$-2x^2 + 6x + 20 = 0$

$2x^2 - 6x - 20 = 0$

$(2x + 4)(x - 5) = 0$

$2x + 4 = 0 \; atau \; x - 5 = 0$

$2x = -4 \; atau \; x = 5$

$x = -2 \; atau \; x = 5$

Luas daerah dari $x = -2$ hingga $x = 5$

$L = \int_{-2}^{5} (f(x) - g(x))dx$

$= \int_{-2}^{5} (-x^2 + 4x + 12 - (x^2 - 2x - 8))dx$

$= \int_{-2}^{5} (-2x^2 + 6x + 20)dx$

$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 + 20x\right]_{-2}^{5}$

$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 + 20x\right]_{-2}^{5}$

$= \left[-\frac{2}{3}(5)^3 + 3(5)^2 + 20(5)\right] - \left[-\frac{2}{3}(-2)^3 + 3(-2)^2 + 20(-2)\right]$

$= \left(-\frac{2}{3}(125) + 3(25) + 100\right) - \left(-\frac{2}{3}(-8) + 3(4) - 40\right)$

$= \left(-\frac{250}{3} + 75 + 100\right) - \left(\frac{16}{3} + 12 - 40\right)$

$= \left(-\frac{250}{3} + \frac{225}{3} + \frac{100}{3}\right) - \left(\frac{16}{3} + \frac{36}{3} - \frac{120}{3}\right)$

$= \left(\frac{275}{3} - (-\frac{68}{3})\right)$

$= \frac{275}{3} + \frac{68}{3}$

$= \frac{343}{3}$

$= 141\frac{1}{3}$

Jadi luas daerah tersebut adalah $141\frac{1}{3}$ satuan luas

3. Luas daerah yang dibatasi parabola $y = 8 - x^2$ dan garis $y = 2x$ adalah.....satuan luas
Penyelesaian:

Batas integral

$y_1 = y_2$

$8 - x^2 = 2x$

$8 - x^2 - 2x = 0$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$(x-2)(x+4) = 0$

$x = 2 \; atau \; x = -4$

$$\int_{-4}^{2}(8 - x^2 - 2x)\,dx = \left[8x - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_{-4}^{2}$$

$$= \left[8(2) - \frac{1}{3}(2)^3 - (2)^2\right] - \left[8(-4) - \frac{1}{3}(-4)^3 - (-4)^2\right]$$

$$= \left(16 - \frac{8}{3} - 4\right) - \left(-32 - (-\frac{64}{3}) - (16)\right)$$

$$= \left(16 - \frac{8}{3} - 4 + 32 - \frac{64}{3} + 16\right)$$

$= 16 - 24$

$= 36$ satuan luas

4. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 4 - x^2$ dan $y = -x + 2$ pada interval $0 \leq x \leq 3$ adalah....
Penyelesaian:
$y = 4 - x^2$
$y = -x + 2$
Batas integral :
$y_1 = y_2$

$4 - x^2 = -x + 2$
$4 - x^2 + x - 2 = 0$
$-x^2 + x + 4 - 2 = 0$
$x^2 - x - 2 = 0$
$(x-2)(x+1) = 0$
$x = 2 \; atau \; x = -1$
Pada batas integral $x = 0 \; sampai \; x = 3, terdapat \; dua \; bagian \; daerah$
L1 diatas sumbu x, pada batas x = 0 sampai x = 2
L2 dibawah sumbu x, pada batas x = 2 sampai x = 3

L1 = $\int_0^2 (4 - x^2) - (-x + 2)\,dx$
L2 = $\int_2^3 (-x + 2) - (4 - x^2)\,dx$
L = L1 + L2

$$L1 = \int_0^2 (4 - x^2) - (-x + 2)\,dx = \left[4 - x^2 + x \;\; + 2\right]_0^2$$
$$= \left[-x^2 + x \;\; + 2\right]_0^2$$
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_0^2$$
$$= \left(-\tfrac{1}{3}(2)^3 + \tfrac{1}{2}(2)^2 + 2(2)\right) - \left(-\tfrac{1}{3}(0)^3 + \tfrac{1}{2}(0)^2 + 2(0)\right)$$
$$= \left(-\tfrac{8}{3} + \tfrac{4}{2} + 4\right) - 0$$
$$= \left(-\tfrac{8}{3} + 2 + 4\right) - 0$$
$$= -\frac{8}{3} + \frac{18}{3}$$
$= \frac{10}{3}$ satuan luas

$$L2 = \int_2^3 (-x + 2) - (4 - x^2)\,dx = \left[-x + 2 - 4 + x^2\right]_2^3$$
$$= \left[x^2 - x - 2\right]_2^3$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_2^3$$
$$= \left(\tfrac{1}{3}(3)^3 - \tfrac{1}{2}(3)^2 - 2(3)\right) - \left(\tfrac{1}{3}(2)^3 - \tfrac{1}{2}(2)^2 - 2(2)\right)$$
$$= \left(\tfrac{27}{3} - \tfrac{9}{2} - 6\right) - \left(\tfrac{8}{3} - \tfrac{4}{2} + 4\right)$$
$$= \left(\tfrac{27}{3} - \tfrac{8}{3} - \tfrac{9}{2} + \tfrac{4}{2} - 6 + 4\right)$$
$$= \left(\frac{19}{3} - \frac{5}{2} - 2\right)$$
$$= \left(\frac{38}{6} - \frac{15}{6} - \frac{12}{6}\right)$$
$$= \frac{38}{6} - \frac{27}{6}$$
$$= \frac{11}{6}$$

Jadi L1+L2 = $\frac{10}{3} + \frac{11}{6}$

$= \frac{20}{6} + \frac{11}{6}$

$= \frac{31}{3} = 10\frac{1}{3}$ satuan luas

5. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = -3x$ dan $y = 4 - x^2$ adalah…

$y = -3x$ dan $y = 4 - x^2$

$y = y$

$-3x = 4 - x^2$

$-3x - 4 + x^2 = 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x + 1)(x - 4) = 0$

$x = -1$ atau $x = 4$

Batas integral : – 1 sampai 4

$$\int_{-1}^{4}(-3x - 4 + x^2)dx = \left[-\frac{3}{2}x^2 - 4x + \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{4}$$

$$= (\tfrac{3}{2}(4)^2 - 4(4) + \tfrac{1}{3}(4)^3) - (\tfrac{3}{2}(-1)^2 - 4(-1) + \tfrac{1}{3}(-1)^3)$$

$$= (\tfrac{3}{2}(16) - 16 + \tfrac{1}{3}(64)) - (\tfrac{3}{2} + 4 - \tfrac{1}{3})$$

$$= (24 - 16 + \tfrac{64}{3} - \tfrac{3}{2} + 4 - \tfrac{1}{3})$$

$$= (24 - 16 + 4 + \tfrac{64}{3} - \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{3})$$

$$= (24 - 16 + 4 + \tfrac{63}{3} - \tfrac{3}{2})$$

$$= (24 - 16 + 4 + 21 - \tfrac{3}{2})$$

$$= (49 - 16 - \tfrac{3}{2})$$

$$= (33 - \tfrac{3}{2})$$

$$= (\tfrac{66}{2} - \tfrac{3}{2})$$

$$= \tfrac{63}{2}$$

$= 31\frac{1}{2}$ satuan luas

Daftar Pustaka:

Hidayat Agus, Drs, Modul Matematika Program Paket C setara SMA, CV Arya Duta, 2010

Kasmina dkk, Matematika Program Keahlian Teknologi, Kesehatan dan Pertanian untuk SMK dan MAK Kelas XII, Penerbit Erlangga

Aplikasi Integral Mencari Luas Daerah

http://matemapedia.blogspot.com/2016/12/aplikasi-integral-mencari-luas-daerah.html

https://idschool.net/sma/matematika-sma/aplikasi-integral-mencari-luas-daerah-yang-dibatasi-kurva/

Menentukan Luas Daerah dengan Proses Limit

http://teman-integral.blogspot.com/2017/07/menentukan-luas-daerah-dengan-proses.html

Integral

https://www.studiobelajar.com/integral/

Volume Benda Putar
https://maths.id/menentukan-volume-benda-putar-dengan-integral-tentu.php

PROFIL PENULIS

Nama Lengkap : Nursanto

Telp Kantor/HP : 021-85903277 ext.0/ 0812 1241 0388

E-Mail : nursanto14@gmail.com

Alamat Kantor : Jl. Kober Pedati Rt.007 Rw.02
Kelurahan Balimester Kecamatan Jatinegara
Kota Administrasi Jakarta Timur.

Bidang Keahlian :

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir
1. Mengajar di PKBM FIZAR (Tahun 2005 – sekarang)
2. Mengajar di PKBM Awwaliyah Rohiim (Tahun 2011 – sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar

1. S1 MIPA Jurusan Matematika lulus tahun 1994

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)

-

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir)